TRANSFORMATION DE FOURIER.

I. DANS $L^1(\mathbb{R}^d)$:

DÉFINITION : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

on définit $\mathcal{F}f(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$.

$\xi \mapsto \mathcal{F}f(\xi)$ est continue, bornée, et tend vers 0 à l'infini :

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1}. \quad (*)$$

(Remarque : G groupe abélien loc compact

Caractères $\hat{G} := \{\chi : G \to \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ homomorphismes continus$\}$

Mesure invariante par translation $\rightsquigarrow$ transformée de Fourier sur G :

$$\hat{f}(\chi) := \int_G \overline{\chi(g)}\, f(g)\, dg$$

$(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ : \ \{\chi_n : x \mapsto e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\})$

PROPOSITION :

a) Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\langle x \rangle^m \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Alors $\hat{\varphi} \in C^m(\mathbb{R}^d)$ et $(i\partial_\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}(x^\alpha \varphi)$, $\forall |\alpha| \leq m$.

b) Soit $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^d)$ et $\partial^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \leq m$, alors $\mathcal{F}(\partial^\alpha \varphi)(\xi) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}\varphi(\xi)$.

c) Soit $\tau_a \varphi(x) := \varphi(x+a)$

et $(\tau_a)_* \varphi(x) := \varphi(x-a)$

Alors si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}((\tau_a)_* \varphi) = e^{-i\xi\cdot a}\mathcal{F}\varphi(\xi)$

d) Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\mathcal{F}(e^{ix\cdot a}\varphi) = (\tau_a)_* \mathcal{F}\varphi(\xi)$

Démonstration de a) et b) :

a) $m=1$.

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx$$

$\xi \mapsto e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)$ est de classe C^1 et on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale puisque $x \mapsto -ix_j e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Donc $i\partial_{\xi_j}\hat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}(\cancel{-i}x_j)\varphi(x)dx.$

b) $m=1$.

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\partial_{x_j}\varphi(x)dx$$

$$= i\xi_j \int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\,dx,$$

si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, donc le résultat suit d'un procédé d'approximation : soit $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, t.q. $\varphi_n \to \varphi$ dans L^1, et $\partial\varphi_n \to \partial\varphi$ dans L^1. Alors $\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi_n)(\xi) = i\xi_j\,\mathcal{F}(\varphi_n)(\xi)$ et on conclut par passage à la limite $\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi_n)$ converge vers $\mathcal{F}(\partial_{x_j}\varphi)$ uniformément, et de même $\mathcal{F}(\varphi_n)$ converge vers $\mathcal{F}(\varphi)$ uniformément. ∎

Lemme : Soit A une matrice symétrique réelle définie positive de taille $d\times d$, et soit pour $x\in\mathbb{R}^d$

$$G_A(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det A}}\exp\left(-\frac{1}{2}A^{-1}x\cdot x\right)$$

alors $G_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et

$$\hat{G}_A(\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}A\xi\cdot\xi\right).$$

Démonstration : $G_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est clair.

On écrit $A = QD\,{}^tQ$, avec Q orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_d)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d > 0$.

On pose $y = {}^tQx$ et $\eta = {}^tQ\xi$.

Alors $A^{-1}x = QD^{-1}\,{}^tQx = QD^{-1}y$

et
$$A^{-1}x\cdot x = QD^{-1}y\cdot Qy = D^{-1}y\cdot y = \sum_{j=1}^{d}\lambda_j^{-1}y_j^2$$

$$\hat{G}_A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \prod_{j=1}^{d} \lambda_j}} \int e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} \lambda_j^{-1} y_j^2 - i\sum_{j=1}^{d} y_j \eta_j}$$

$$= \prod_{j=1}^{d} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}} \int e^{-\frac{1}{2}\lambda_j^{-1} y_j^2 - i y_j \eta_j} \, dy_j} \right)$$

Soit $g_{\lambda_j}(y_j) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_j}} \, e^{-\frac{1}{2}\lambda_j^{-1} y_j^2}$.

$$g'_{\lambda_j}(y_j) = -\frac{y_j}{\lambda_j} \, g_{\lambda_j}(y_j)$$

Après passage en Fourier on trouve

$$i \eta_j \, \hat{g}_{\lambda_j}(\eta_j) = -\frac{i}{\lambda_j} \, \hat{g}'_{\lambda_j}(\eta_j)$$

Donc $\hat{g}'_{\lambda_j}(\eta_j) = -\lambda_j \eta_j \, \hat{g}_{\lambda_j}(\eta_j)$

Donc $\hat{g}_{\lambda_j}(\eta_j) = C \, e^{-\frac{\lambda_j}{2}\eta_j^2}$.

Calculons C :

$\hat{g}_{\lambda_j}(0) = C$ et par ailleurs $\hat{g}_{\lambda_j}(0) = \int g_{\lambda_j}(y_j) \, dy_j$

$= 1$

Donc $C = 1$.

Finalement

$$\hat{G}_A(\xi) = \prod_{j=1}^{d} \hat{g}_{\lambda_j}(\eta_j)$$

$$= \prod_{j=1}^{d} e^{-\frac{\lambda_j}{2}\eta_j^2}$$

Mais $\sum_j \lambda_j \eta_j^2 = D\eta \cdot \eta = A\xi \cdot \xi$,

d'où le résultat. ■

THÉORÈME : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F}f$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors presque partout

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\,d\xi$$

On note $\overline{\mathcal{F}}g(x) := \int e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\,d\xi$,

alors $f = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$.

Démonstration :

$$\int e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\,d\xi = \int e^{ix\cdot\xi} \left(\int e^{-iy\cdot\xi} f(y)\,dy \right) d\xi$$

$$\left(= \iint \underbrace{e^{i(x-y)\cdot\xi} f(y)}_{\notin L^1(\mathbb{R}^{2d})} \,dy\,d\xi \right) \leftarrow \text{« intégrale oscillante »}$$

$\longrightarrow$ on ne peut pas appliquer Fubini.

Posons $I_\varepsilon(x) = \iint \underbrace{e^{i(x-y)\cdot\xi - \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2} f(y)\,dy\,d\xi}_{\in L^1(\mathbb{R}^{2d})}$

On applique le théorème de Fubini :

$$I_\varepsilon(x) = \int e^{ix\cdot\xi - \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2} \int e^{-iy\cdot\xi} f(y)\,dy\;d\xi$$

$$= \int e^{ix\cdot\xi - \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2}\,\hat{f}(\xi)\,d\xi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

D'autre part

$$I_\varepsilon(x) = \int f(y)\Big(\underbrace{\int e^{i\underbrace{(x-y)}\cdot\xi - \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2}\,d\xi}\Big)\,dy.$$

$\mathcal{F}(G_{\varepsilon^{-1}})(y-x)$

soit $G_A(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi A)^d}}\, e^{-\frac{1}{2}A^{-1}|x|^2}$

$A>0$

alors $\hat{G}_A(\xi) = e^{-\frac{1}{2}A|\xi|^2}$ par le lemme précédent.

Alors $\int e^{i(x-y)\cdot\xi - \frac{\varepsilon}{2}|\xi|^2}\,d\xi$ $\qquad A = \frac{1}{\varepsilon}$

$$= \left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{|x-y|^2}{\varepsilon}}.$$

Alors

$$I_\varepsilon(x) = \left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{d}{2}} \int f(y) e^{-\frac{1}{2\varepsilon}|x-y|^2} dy.$$

Soit $\zeta_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2\varepsilon}}$.

Alors ζ_ε est une suite régularisante, donc $I_\varepsilon = (2\pi)^d \zeta_\varepsilon * f$,

et donc $I_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f\,(2\pi)^d$ dans L^1,

d'où le résultat.

On remarque que $\mathcal{F}f \in L^1$ donc f est continue, et la convergence de I_ε vers f est vraie aussi uniformément. ■

II Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

<u>Théorème</u> : La transformée de Fourier est un isomorphisme continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, d'inverse $(2\pi)^{-d}\,\overline{\mathcal{F}}$.

<u>Démonstration</u> : Montrons que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ alors $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$$

$$\langle \xi \rangle^m \partial_\xi^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$$
$$= \langle \xi \rangle^m \mathcal{F}((-ix)^\alpha f)(\xi)$$

Donc

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left| \langle \xi \rangle^m \partial_\xi^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi) \right|$$
$$\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\beta| \leq m} \left| \mathcal{F}\left(\partial^\beta ((-ix)^\alpha f)\right)(\xi) \right|$$
$$\leq \sup_{|\beta| \leq m} \left\| \partial^\beta ((-ix)^\alpha f) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leq C \sup_{|\beta| \leq m} \left\| \langle x \rangle^{|\alpha|} \partial^\beta f \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leq C \sup_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \langle x \rangle^{|\alpha|+d+1} \partial^\beta f(x) \right|$$

Donc $\mathcal{F} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{cases} (2\pi)^{-d} \bar{\mathcal{F}} \mathcal{F} \\ = (2\pi)^{-d} \mathcal{F} \bar{\mathcal{F}} = Id \end{cases}$$

On conclut par théorème d'inversion dans L^1 (puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$). ∎

PROPOSITION : Soit φ, ψ et ϕ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

a) $\int \mathcal{F}\varphi(\xi)\, \psi(\xi)\, d\xi = \int \varphi(x)\, \mathcal{F}\psi(x)\, dx$

b) $\int \varphi(x)\, \overline{\phi}(x)\, dx = (2\pi)^{-d} \int \mathcal{F}\varphi(\xi)\, \overline{\mathcal{F}}\,\overline{\phi}(\xi)\, d\xi$

$$\left(\overline{\mathcal{F}}\,\overline{\phi}(x) = \overline{\mathcal{F}\phi(x)} = \int e^{ix\cdot\xi}\, \overline{\phi}(\xi)\, d\xi \right)$$

Démonstration :

a) $$\int \left(\int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x)\, dx \right) \psi(\xi)\, d\xi$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int \varphi(x) \left(\int e^{-ix\cdot\xi} \psi(\xi)\, d\xi \right) dx$$

$$= \int \varphi(x)\, \mathcal{F}\psi(x)\, dx.$$

b) Posons $f(\xi) = \overline{\mathcal{F}}\,\overline{\phi}(\xi)$.

Alors $(2\pi)^{-d} \mathcal{F} f = \overline{\phi}$.

Donc $$\int \varphi(x)\, \overline{\phi}(x)\, dx = (2\pi)^{-d} \int \varphi(x)\, \mathcal{F} f(x)\, dx$$

$$\underset{\text{par le a)}}{=} (2\pi)^{-d} \int \mathcal{F}\varphi(\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-d} \int \mathcal{F}\varphi(\xi)\, \overline{\mathcal{F}}\,\overline{\phi}(\xi)\, d\xi. \blacksquare$$

III Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

DÉFINITION : Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit la distribution $\mathcal{F}S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \mathcal{F}S, \varphi \rangle := \langle S, \underbrace{\mathcal{F}\varphi}_{\in \mathcal{S}} \rangle$$

Rappel : . $\mathcal{F}$ dans L^1 + lien décroissance / régularité

inversion $(2\pi)^{-d}\bar{\mathcal{F}}$

$$\bar{\mathcal{F}} g(x) := \int e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\, d\xi$$

. $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}$

PROPOSITION : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors

$$\mathcal{F} T_{\underbrace{f}_{L^1}} = T_{\underbrace{\mathcal{F}f}_{L^\infty}}$$

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}T_f, \varphi \rangle &= \langle T_f, \mathcal{F}\varphi \rangle \\
&= \int f(x)\, \mathcal{F}\varphi(x)\, dx \\
&= \int f(x) \left(\int e^{-ix\cdot\xi} \varphi(\xi)\, d\xi \right) dx \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \int \varphi(\xi) \left(\int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx \right) d\xi \\
&= \int \varphi(\xi)\, \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

$$= \langle T_{\mathcal{F}f}, \varphi \rangle. \quad \blacksquare$$

THÉORÈME : $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, d'inverse $(2\pi)^{-d}\,\overline{\mathcal{F}}$.

(où $\langle \overline{\mathcal{F}} S, \varphi \rangle = \langle S, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$)

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(2\pi)^{-d} \langle \overline{\mathcal{F}} \underbrace{\mathcal{F} S}_{S'}, \varphi \rangle = (2\pi)^{-d} \langle \mathcal{F} S, \overline{\mathcal{F}} \varphi \rangle$$
$$= (2\pi)^{-d} \langle S, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} \varphi \rangle$$
$$= \langle S, \varphi \rangle.$$

D'où le résultat. $\blacksquare$

THÉORÈME : Soit (S_n) une suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $S_n \longrightarrow S$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors $(\mathcal{F}S_n)$ converge vers $\mathcal{F}S$.

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\langle \mathcal{F} S_n, \varphi \rangle = \langle S_n, \mathcal{F}\varphi \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle S, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}S, \varphi \rangle \quad \blacksquare$$

PROPOSITION : Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors

1) $\mathcal{F}(\partial_j S) = i \xi_j \mathcal{F} S$.
2) $\mathcal{F}(x_j S) = i \partial_{\xi_j} \mathcal{F} S$
3) $\mathcal{F}(S \circ \tau_a) = e^{i\xi . a} \mathcal{F} S$.

(où $\langle S \circ \tau_a, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \circ \tau_{-a} \rangle$ où $\varphi \circ \tau_{-a}(x) = \varphi(x-a)$)

4) $\mathcal{F}(e^{ix.a}S) = \mathcal{F}S \circ \tau_a$.

5) $\mathcal{F}(S \circ h_\lambda) = \frac{1}{|\lambda|^d} \mathcal{F}S \circ h_{\frac{1}{\lambda}}$.

(où $\langle S \circ h_\lambda, \varphi \rangle = \langle S, \frac{1}{|\lambda|^d} \varphi \circ h_{\frac{1}{\lambda}} \rangle$

$\lambda \neq 0$

où $\varphi \circ h_\lambda = \varphi(\lambda \cdot))$.

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

1) $$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\partial_j S), \varphi \rangle &= \langle \partial_j S, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= - \langle S, \partial_j \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= - \langle S, \mathcal{F}(-i\xi_j \varphi) \\ &= \langle S, \mathcal{F}(i\xi_j \varphi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}S, i\xi_j \varphi \rangle \\ &= \langle i\xi_j \mathcal{F}S, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(x_j S), \varphi \rangle &= \langle x_j S, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \langle S, x_j \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \langle S, -i \mathcal{F}(\partial_{\xi_j} \varphi) \rangle \\ &= \langle -i\mathcal{F}S, \partial_{\xi_j} \varphi \rangle \\ &= \langle i\partial_{\xi_j} \mathcal{F}S, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(S \circ \tau_a), \varphi \rangle &= \langle S \circ \tau_a, \mathcal{F}\varphi \rangle \\ &= \langle S, \mathcal{F}\varphi \circ \tau_{-a} \rangle \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\varphi \circ \tau_{-a}(x) = \mathcal{F}\varphi(x-a) = \int e^{-i(x-a)\cdot\xi} \varphi(\xi) d\xi$$

$$< e^{i\xi\cdot a}\mathcal{F}S, \varphi > = < \mathcal{F}S, e^{i\xi\cdot a}\varphi >$$
$$= < S, \mathcal{F}(e^{i\xi\cdot a}\varphi) >$$

et $\mathcal{F}(e^{i\xi\cdot a}\varphi)(x) = \int e^{-ix\cdot\xi} e^{i\xi\cdot a}\varphi(\xi)d\xi$

$$= \int e^{-i(x-a)\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi.$$

les autres cas sont laissés en exercice! ☒

Exemples :

- δ_0 : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$< \mathcal{F}\delta_0, \varphi > = < \delta_0, \mathcal{F}\varphi >$$
$$= \mathcal{F}\varphi(0) = \int \varphi(x)dx$$
$$= < 1, \varphi >$$

Donc $\mathcal{F}\delta_0 = 1 = \bar{\mathcal{F}}\delta_0$

De même, $\mathcal{F}(1) = (2\pi)^d\,\delta_0 = \bar{\mathcal{F}}(1)$.
(car $(2\pi)^{-d}\,\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\delta_0) = \delta_0$)

- De même $\mathcal{F}\,\delta_a(\xi) = e^{-i\xi\cdot a}$

$$(< \mathcal{F}\delta_a, \varphi > = < \delta_a, \mathcal{F}\varphi > = \mathcal{F}\varphi(a) = \int e^{-i\xi\cdot a}\varphi(\xi)\,d\xi)$$

- Enfin $\mathcal{F}(x^\alpha) = (2\pi)^d\, i^{|\alpha|}\partial^\alpha\delta_0$.
(par le fait que $\mathcal{F}(x^\alpha S) = (i\partial)^\alpha\mathcal{F}(S)\ \forall S \in \mathcal{S}'$)

PROPOSITION : Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\Delta S = 0$.
Alors S est un polynôme.

Démonstration : $\Delta S = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
alors $-|\xi|^2 \mathcal{F}S = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$\left(\Delta S = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2} \right.$$

et
$$\mathcal{F}(\partial_j S) = i\xi_j \mathcal{F}S$$
$$\left. \mathcal{F}(\partial_j^2 S) = -\xi_j^2 \mathcal{F}(S) \right).$$

Mais alors $\operatorname{supp} \mathcal{F}S = \{0\}$ $\quad (S \neq 0)$.

En effet : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi \equiv 0$ au voisinage de 0 : mq $\langle \mathcal{F}S, \varphi \rangle = 0$.

Soit $\psi(\xi) = \dfrac{\varphi(\xi)}{|\xi|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Alors
$$\langle \mathcal{F}S, \varphi \rangle = \langle \mathcal{F}S, |\xi|^2 \psi \rangle$$
$$= \langle |\xi|^2 \mathcal{F}S, \psi \rangle = 0.$$

$$\left(\begin{array}{l} (x-a)T = 0 \\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \end{array} \Rightarrow \operatorname{supp} T \subset \{a\} \right)$$

Alors $\mathcal{F}S = \sum_{|\alpha| \leq n} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$.

$$S = (2\pi)^{-d} \bar{\mathcal{F}} \mathcal{F} S = (2\pi)^{-d} \sum_{|\alpha| \leq n} c_\alpha \bar{\mathcal{F}}(\partial^\alpha \delta_0)$$

$$= (2\pi)^{-d} \sum_{|\alpha| \leq n} c_\alpha (-i)^{|\alpha|} x^\alpha.$$

<u>Corollaire</u> : Soit S une distribution tempérée harmonique.
Si S est bornée, alors elle est constante.

IV Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$:

On munit L^2 du produit scalaire

$$(f|g)_{L^2} := \int f(x)\,\bar{g}(x)\,dx.$$

<u>Théorème</u> : $\mathcal{F}$ (définie sur S') est un isomorphisme de L^2 dans L^2 d'inverse $(2\pi)^{-d}\bar{\mathcal{F}}$, et on a

PLANCHEREL

$$(f|g)_{L^2} = (2\pi)^{-d}(\mathcal{F}f|\mathcal{F}g)_{L^2}$$

(En particulier $\|f\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-d}\|\mathcal{F}f\|^2_{L^2}$)

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F} : L^2 \to L^2$$

isométriquement.

<u>Démonstration</u> : On sait que $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ et vérifie pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\|\varphi\|^2_{L^2} = (2\pi)^{-d}\|\mathcal{F}\varphi\|^2_{L^2} \quad (*)$$

$$\text{et } (\varphi|\psi)_{L^2} = (2\pi)^{-d}(\mathcal{F}\varphi|\mathcal{F}\psi)_{L^2}$$

On sait que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et (f_n) une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que f_n converge vers f dans L^2.

$\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$

Mais alors par $(*)$, $(\mathcal{F}f_n)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, donc converge vers une limite g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Par ailleurs $f_n \longrightarrow f$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Donc $\mathcal{F}f_n \longrightarrow \mathcal{F}f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (par le résultat vu plus haut). Donc $\mathcal{F}f = g$ dans $\mathcal{S}'$, donc on peut prolonger $\mathcal{F}$ $: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ en une application linéaire continue sur L^2, avec (par continuité de la norme) $\|\mathcal{F}f\|_{L^2}(2\pi)^{-d/2} = \|f\|_{L^2}$.

Remarque le résultat est identique pour $\overline{\mathcal{F}}$.

PROPOSITION (Principe d'incertitude de Heisenberg) :

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ t.q. $xf \in L^2$ et $\nabla f \in L^2$.
Alors $\|f\|_{L^2}^2 \leqslant C_d \|\underbrace{(\cdot - x_0)f}_{\varepsilon}\|_{L^2} \|\underbrace{(\cdot - \xi_0)\hat{f}}_{\frac{1}{\varepsilon}}\|_{L^2}$.

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\forall \xi_0$

$\int |x - x_0|^2 f^2 \, dx$

Démonstration : $x_0 = \xi_0 = 0$ f à valeurs réelles

$$\left| \int f(x)\, x \cdot \nabla f(x)\, dx \right| \leqslant \|xf\|_{L^2} \|\nabla f\|_{L^2}$$

et $\|\nabla f\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|\xi \hat{f}\|_{L^2}$

Mais $$\int f(x)\, x \cdot \nabla f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int x \cdot \nabla f^2(x)\, dx$$
$$\overset{(*)}{=} -\frac{1}{2} \int \operatorname{div} x \; f^2(x)\, dx$$

(ou par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$)

Mais $\operatorname{div} x = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} x_j = d$

Donc $\int f(x)\, x.\nabla f(x)\, dx = -\frac{d}{2} \|f\|_{L^2}^2$.

D'où $\|f\|_{L^2}^2 \leq \frac{2}{d} (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \|xf\|_{L^2} \|\xi \hat{f}\|_{L^2}$.

D'où le résultat. ▪

$$(*) \quad \int x.\nabla f^2(x)\, dx = \sum_{j=1}^{d} \int x_j \frac{\partial f^2}{\partial x_j}(x)\, dx$$

$$= -\sum_{j=1}^{d} \int \partial_{x_j} x_j\, f^2(x)\, dx$$

$$= -\int \operatorname{div} x\, f^2(x)\, dx.$$

$$\left|\sum_j \int f x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \leq \int |f||x|\, |\nabla f(x)|\, dx \leq \|f\|\, \|\nabla f\|$$

Rq :
$$\|\nabla f\|_{L^2}^2 = \int |\nabla f|^2(x)\, dx = \int \sum_{j=1}^{d} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|^2 dx$$

$$\left(\|\xi \hat{f}\|_{L^2}^2 = \int |\xi \hat{f}|^2\, d\xi = \int \sum_{j=1}^{d} \xi_j^2 |\hat{f}|^2\, d\xi. \right)$$

VI Transformée de Fourier dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Théorème : Soit $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $\mathcal{F}E$ est la fonction C^∞ donnée par

$$\mathcal{F}E(\xi) = \langle E, e_\xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

où $e_\xi(x) := e^{-ix\cdot\xi}$. Par ailleurs $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists C > 0$ t.q. $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$

$$|\partial^\alpha \mathcal{F}E(\xi)| \leqslant C \langle \xi \rangle^m.$$

($\int e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$; $\int e^{2\pi i x\cdot n} f(x)$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ $\qquad n \in \mathbb{Z}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\,d\xi \longleftrightarrow \sum_n e^{-2i\pi x\cdot n} \hat{f}(n)$$

$[0,1]^d$)